Réponse harmonique des systèmes du 1° et du 2° ordre

TD1

Réponse harmonique d'un système régi par une équation différentielle du 1° ordre
Thermique d'une sphère creuse

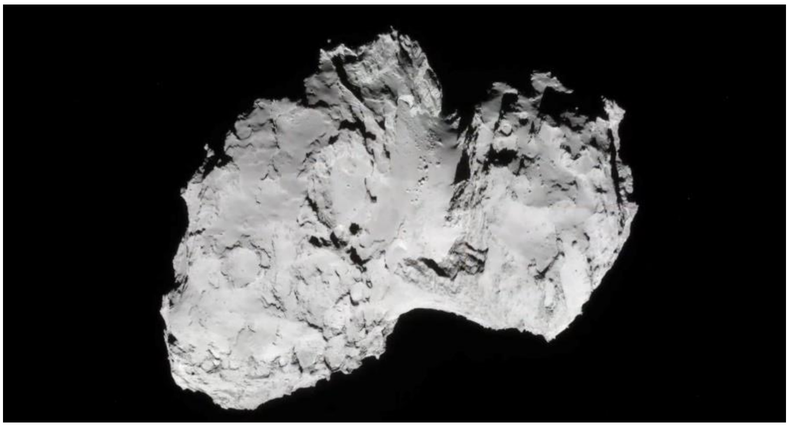
Programme - Compétences		
B11	MODELISER	Caractéristiques des grandeurs physiques: - nature physique - caractéristiques fréquentielles - caractéristiques temporelles
B24	MODELISER	Systèmes linéaires continus et invariants: - Modélisation par équations différentielles - Calcul symbolique - fonction de transfert; gain, ordre, classe, pôles, zéros
B25	MODELISER	Signaux canoniques d'entrée: - échelon - signaux sinusoïdaux
B28	MODELISER	Modèles de comportement
C21	RESOUDRE	Réponses temporelle et fréquentielle: - systèmes du 1er et 2e ordre - intégrateur

Exercice 1: Bode 1° ordre

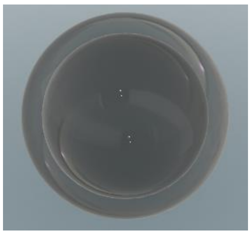
Mise en situation

Exploration des exo planètes

La conquête spatiale nous conduit à l'exploration d'astres à des millions de km de la Terre. Pour cela, on procède à l'envoie de robots dans le but d'acquérir un grand nombre de données qui sont renvoyées sur Terre par émission d'ondes radio afin d'être étudiées. Souvenez-vous de ce petit robot « Philae » qui a attéri le 12 Novembre 2014 sur la comète « Tchouri » à plus de 500 millions de km de la Terre.



Nous développons aujourd'hui un nouveau robot destiné à l'exploration d'exo planètes lointaines. Ce robot va se déplacer et déposera, le long de son chemin, des sphères fermées équipées d'électronique et de différents capteurs qui transmettront leurs données sans fil au robot par ondes radios, qui lui-même retransmettra ces données vers la Terre. Cela permettra de récupérer un grand nombre de données en même temps à différents endroits de la planète explorée.



Objectif

Les cycles thermiques sur la planète explorée sont sévères et vont conduire à des variations cycliques de température des sphères et de leur équipement pouvant conduire à une diminution forte de leur durée de vie.

Les sphères, à la température initiale $T_i = 20°C$ dans le robot, sont déposées sur la surface de la planète et subissent alors les variations de température de l'atmosphère de la planète.

Nous allons déterminer la loi d'évolution de la température au sein de ces sphères pour un matériau donné et nous serons alors en mesure de choisir un matériau permettant de limiter ces variations de température dans le but de préserver l'équipement des sphères de mesure.

Cahier des charges

Un avant-projet a permis de montrer que nous avions à notre disposition 3 matériaux pour le constituant des sphères :

Matériau	ρ (Kg/m^3)	c (J/kg/K)
Aluminium	2700	888
Acier	7850	465
Titane	4500	522

De même, les dimensions des sphères sont fixées. Leurs rayons intérieurs et extérieurs sont :

$$R_i = 120\,mm \quad ; \quad R_e = 150\,mm$$

La variation de température des composants à l'intérieur des sphères doit être au maximum égale à :

$$\Delta T = 50°C$$

Données

La température de l'exo planète visée évolue entre :

$$T_1 = 0°C \quad ; \quad T_2 = 100°C$$

La température ambiante $T_0'(t)$ évolue entre T_1 et T_2 de manière journalière à une fréquence de rotation f avec une tendance sinusoïdale :

$$T_0'(t) = [T_m + T_0 \sin(\omega_p t)]u(t) \quad ; \quad T_m = \frac{T_2 + T_1}{2} \quad ; \quad T_0 = \frac{T_2 - T_1}{2}$$

On note $T_0(t)$ la température ambiante en kelvin.
La période du mouvement de rotation de la planète, c'est-à-dire la durée cycle jour/nuit sur la planète, vaut : $T_p = 8\,h$

On note ω_p la pulsation associée à la rotation de la planète.

Le coefficient d'échange par convection sur cette planète possédant une atmosphère est donné :

$$h = 10\,W.m^{-2}.K^{-1}$$

Physique du problème

Nous allons étudier l'évolution de la température d'un solide dans lequel nous supposerons que la température est uniforme à tout instant. En effet, compte tenu des faibles dimensions, des temps relativement grands de la variation de température et des fortes diffusivités thermiques des métaux étudiés, nous négligerons les effets de la diffusion.

L'évolution de la température de ce solide sera donc régie par l'équation suivante :

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{P(t)}{\rho V c}$$

Avec :

- V le volume du solide (m^3)
- $T(t)$ la température ($°K$) - $T(K) = T'(°C) + 273,15$
- $P(t)$ la puissance reçue et/ou perdue ($W.m^{-3}$)
- ρ la masse volumique du matériau ($kg.m^{-3}$)
- c la chaleur spécifique massique du matériau ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)

Nous supposerons que le seul échange thermique entre le solide étudié et l'extérieur est un échange par convection avec l'air extérieur (pas de rayonnement) :

$$P(t) = -hA\big(T(t) - T_0(t)\big)$$

Avec

- h le coefficient de transfert thermique ($W.m^{-2}.K^{-1}$)
- A l'aire de la surface (m^2) d'échange avec l'air ambiant à la température $T_0(t)$

On néglige donc en particulier l'effet de l'échauffement produit par les composants électroniques dans les sphères.

Equation différentielle

Question 1: Donner l'équation différentielle liant $T(t)$ et $T_0(t)$

Soient $T'(t)$ et $T'_0(t)$ les températures en Celcius ($°C$).

Question 2: Montrer que $T'_0(t)$ et $T'(t)$ vérifient la même équation différentielle que $T(t)$ et $T_0(t)$

Question 3: Transformer cette équation dans le domaine de Laplace en supposant des conditions initiales non nulles – On note $T'(0^+) = T_i$

Question 4: Montrer que la température $T'(p)$ se met sous la forme $T'(p) = H(p){T_0}'(p) + H_i(p)T_i$ où $H(p)$ et $H_i(p)$ seront données sous forme canonique en précisant leurs coefficients caractéristiques

Question 5: Discuter des unités des coefficients obtenus – On rappelle qu'une transformation de Laplace est une intégrale temporelle

Question 6: Exprimer la température ${T_0}'(p)$ de la planète dans le domaine de Laplace connaissant la fonction temporelle ${T_0}'(t)$

Question 7: En déduire l'expression de $T'(p)$ en réponse à cette température imposée

Réponse temporelle

Supposons dans un premier temps que la température sur la planète est constante : $T_0 = 0$

Question 8: Déterminer l'évolution de la température lorsque la sphère est déposée sur la planète

Question 9: Déterminer l'expression du temps t_r permettant à la sphère de se rapprocher de 95% par rapport à la température finale

Considérons maintenant que la température évolue : $T_0 \neq 0$

Question 10: Donner l'expression de la solution temporelle de la température de la sphère sur la planète en vous aidant des résultats du cours pour la réponse harmonique

Question 11: Donner l'expression de ${T_p}'(t)$ en régime permanent

Pour la partie suivante, on donne la réponse permanente :

$${T_p}'(t) = T_m + |H(j\omega_p)| T_0 \sin(\omega_p t + \varphi)$$

On remarquera que la réponse en régime permanent ne dépend pas de T_i.

Réponse harmonique en régime permanent de l'aluminium

Dans un premier temps, choisissons un matériau afin de mener la démarche d'étude : **Aluminium**

Question 12: Déterminer les valeurs numériques des coefficients caractéristiques de $H(p)$
Question 13: Donner l'ordre de grandeur du temps de réponse $t_{r_{5\%}}$ pour ce matériau
Question 14: Tracer sur le document réponse 1 le diagramme de Bode asymptotique (gain & phase) associé à l'évolution harmonique de la température de la sphère et ajouter l'allure de la courbe réelle
Question 15: En déduire une approximation de $T'(t)$ par lecture graphique du diagramme de Bode
Question 16: Déterminer cette réponse par le calcul
Question 17: Tracer une approximation de l'entrée et de la sortie en calculant en particulier le déphasage temporel entre l'entrée et la sortie t_φ

Respect du cahier des charges

Afin de respecter le critère de température du cahier des charges :
- soit le robot doit être envoyé sur une planète tournant à une fréquence différente
- soit il faut changer de matériau

Question 18: Sur une autre planète, à partir de quelle durée du jour $T_p{}'$ serait-il possible de respecter le cahier des charges avec de l'aluminium
Question 19: En changeant le matériau, déterminer la constante de temps T^{lim} limite permettant de respecter le cahier des charges
Question 20: En déduire le critère sur le produit ρc permettant de répondre au critère du cahier des charges sur la planète étudiée
Question 21: Choisir un matériau permettant de respecter le critère proposé
Question 22: Tracer sur le document réponse 2 le diagramme de Bode (gain & phase) avec ce nouveau matériau
Question 23: En déduire l'expression approchée de la température par lecture graphique du diagramme de Bode dans ce cas

Evolution de la température avec le matériau choisi

Question 24: Tracer finalement une approximation de l'entrée et de la sortie en calculant en particulier le déphasage temporel entre l'entrée et la sortie t_φ

Ecart entre le modèle sans diffusion et simulation

Nous souhaitons à présent prendre en compte la conductivité dans les sphères ainsi que leur épaisseur et la diffusion de la chaleur en leur sein afin de vérifier que les hypothèses initiales ayant conduit à un modèle sans conduction n'étaient pas trop mauvaises.
Nous négligerons la présence d'air dans les sphères et garderons les mêmes hypothèses que précédemment, tout en prenant maintenant en compte la diffusivité à travers l'épaisseur.

Compte tenu de l'invariance sphérique du problème étudié, l'équation de la chaleur à résoudre est la suivante :

$$\frac{\partial T(t,r)}{\partial t} = D_{th}\Delta T(t,r) \quad ; \quad D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c} \quad ; \quad \Delta T(t,r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\big(rT(t,r)\big)}{\partial r^2}$$

Nous proposons une résolution aux différences finies (thème abordé en IPT) permettant de déterminer, en tout point (discrétisation en espace avec une longueur dr constante sur le rayon), la température au temps suivant $t + dt$ connaissant la température au temps dt, tous les pas de temps étant identiques.
Le flux est imposé nul sur la surface intérieure des sphères, on ne prend pas en compte la présence d'air. Le flux de convection est imposé sur la surface extérieure.
Pour tous les points hormis les extrémités :

$$T(t+dt,r) = T(t,r) + D_{th}\frac{dt}{dr^2}\frac{(r+dr)T(r+dr) + (r-dr)T(t,r-dr) - 2rT(t,r)}{r}$$

Alors, on peut calculer les températures des extrémités afin de répondre aux conditions de flux pour le pas de temps suivant :

Sur la surface intérieure, flux nul :

$$T(t+dt,r_i+dr) = T(t+dt,r_i)$$

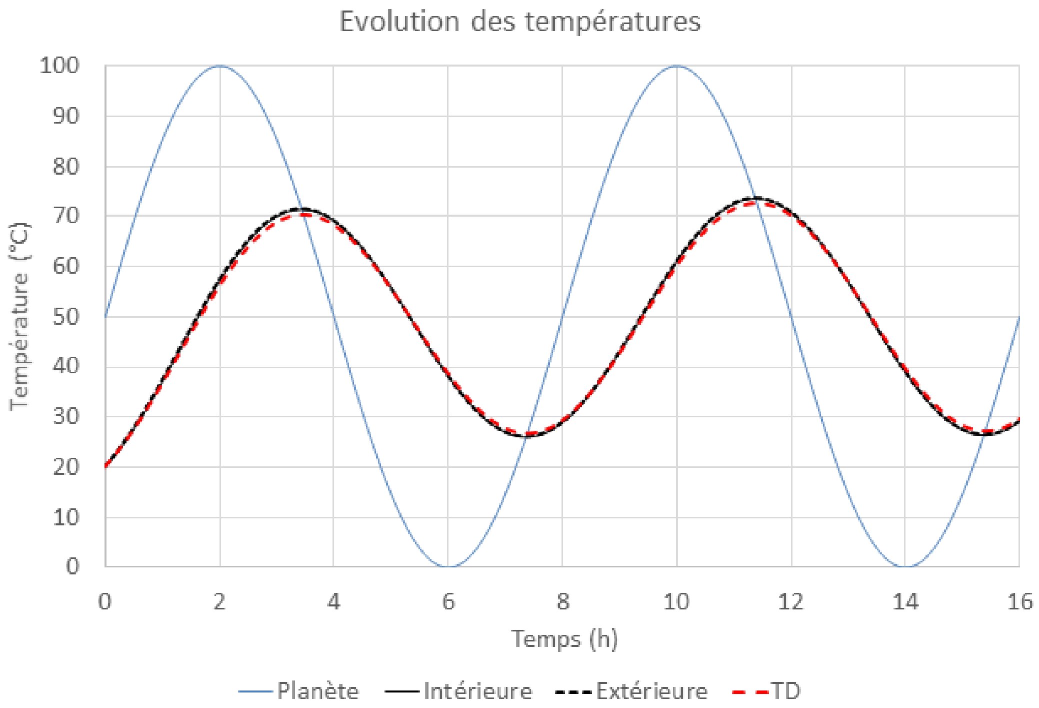
Sur la surface extérieure, flux de convection :

$$T(t+dt,r_e) = \frac{\lambda}{\lambda + drh}T(t+dt,r_e - dr) + \frac{drh}{\lambda + drh}T_0(t+dt)$$

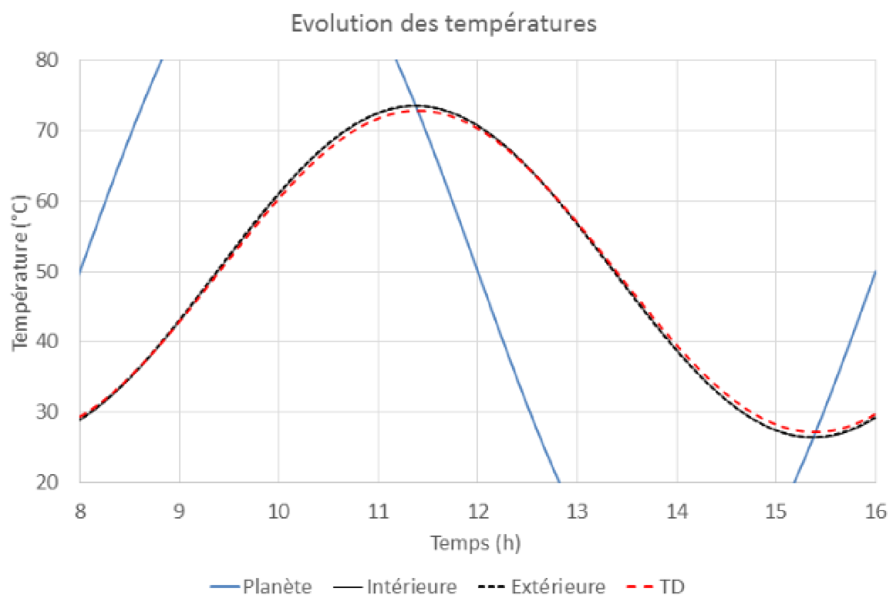
Nous procédons à cette simulation.

Les figures suivantes présentent :

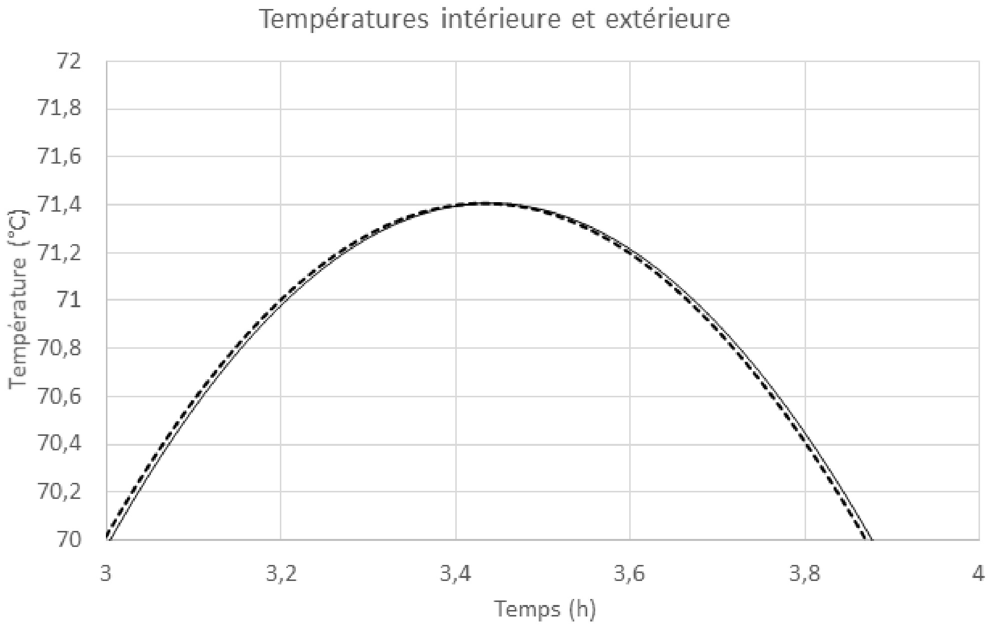
- L’évolution de la température de la planète « Planète »de 0 à 100 °C
- L’évolution des températures intérieure et extérieure de la sphère par simulation Python (courbes quasiment superposées) »Intérieure » & « Extérieure »
- L’évolution de la température de la sphère obtenue avec le modèle initial et utilisation de Bode et nommée « TD »



Voici un zoom des courbes en régime établi afin de se rendre compte des écarts entre modèle sans diffusion et simulation avec diffusion.

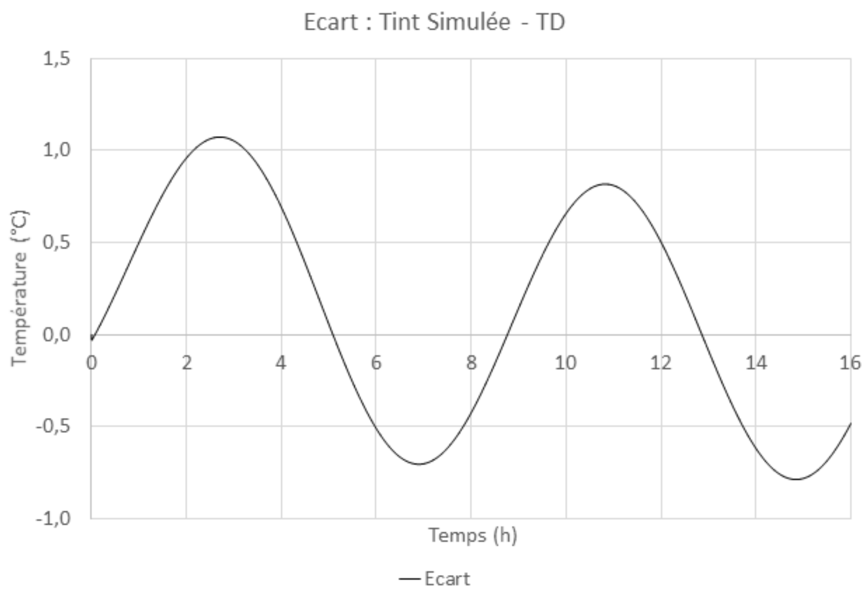


On a zoomé fortement afin de voir la différence entre température intérieure et extérieure lors d'un pic de température :



Question 25: Que peut-on dire des écarts de température entre intérieur et extérieur des sphères dans le modèle simulé ?

On a tracé l'écart entre la température intérieure simulée et température du modèle initial "TD" sur le graphique suivant :

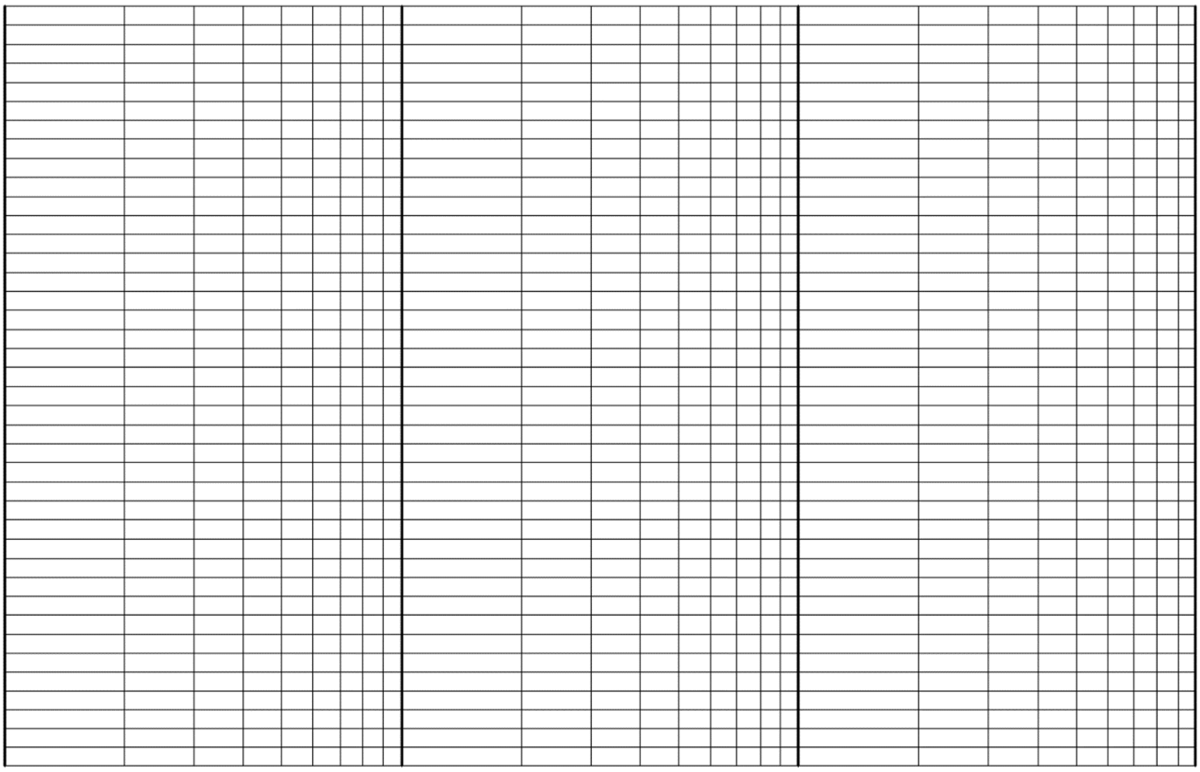


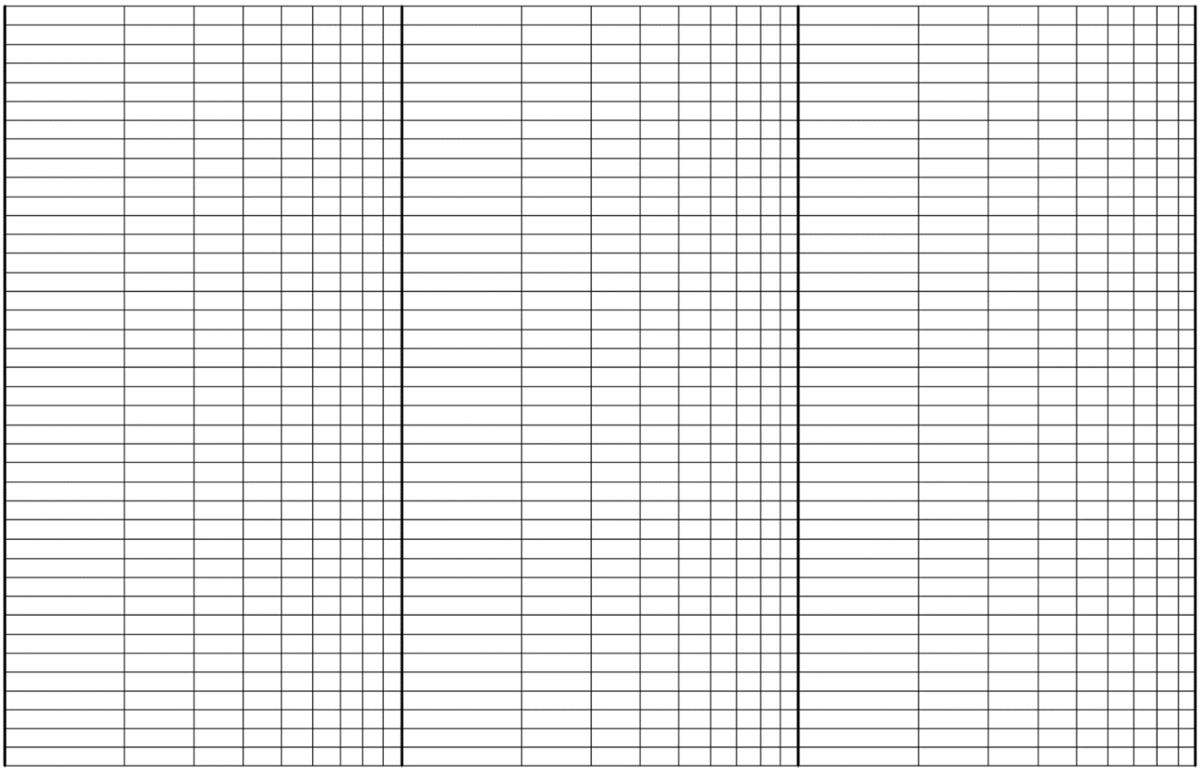
Question 26: Que peut-on dire de l'écart entre température du modèle négligeant la diffusion et de la solution numérique simulée avec Python

Question 27: Conclure quant à l'hypothèse initiale consistant à négliger la diffusion

Question 28: Dans quelles conditions cette hypothèse pourrait être remise en cause ?

Document réponse 1





Document réponse 2